

一道尺规作图题的 多种作法与教学启示

顾香才(江苏省南京市高淳区第一中学)

摘要:尺规作图在现今的数学教学中应该怎么教,教到怎样的程度,值得数学教师深思。以“过圆上一点作圆的切线”为例,阐述尺规作图的基本思路和操作流程,并对教学实践的过程进行反思,这是从教学实践层面进行的探究,对尺规作图教学具有积极的意义。

关键词:教材研究;基本作图;教学设计;教学启示

文章编号:1002-2171(2020)4-0018-04

2019年,南京市高淳区九年级“学情调研”考试中,有这样一道作图题:“已知 $\odot O$,利用直尺和圆规完成下列作图,不写作法,保留作图痕迹。(1)点 P 在 $\odot O$ 上,过点 P 作 $\odot O$ 的切线;(2)点 P 在 $\odot O$ 外,过点 P 作 $\odot O$ 的切线。”数据显示,得分率偏低,探查原因应该是教师在教学中有所忽视。困惑之余,笔者将第(1)问做了一次专题复习,期望了解学生“怎么想到这么画”。

1 学情分析

鉴于教材编排和新知逻辑顺序,尺规作图零散分布于三个年级的不同章节。由于知识的限制,教师教学时对它们的关联性关注不足,对其应用性的体现也不够充分;另外,学生在平时的学习中不断受工具作图的干扰,较少有机会使用尺规作图,更鲜有用尺规作图综合解答相关问题的经验。总之,尺规作图被弱化成为一种操作,学生对作图原理认识不足,对其缺乏系统认识^[1]。

2 教学目标

(1)明确尺规作图的定义和步骤。

(2)熟练完成五种基本作图,会作确定的三角形及三角形的外接圆、内切圆,圆的内接正三角形和正六边形。

(3)了解作图的步骤和实施这些步骤的原理,熟悉三种语言之间的转换,发展直觉思维和逻辑思维。

3 课堂展示及教学交流

3.1 教学铺垫

请同学们完成五种基本作图,并尝试说说作图原理:(1)作一条线段等于已知线段;(2)作一个角等于已知角;(3)作角的平分线;(4)经过一点作已知直线的垂线;(5)作线段的垂直平分线。

说明:组织教学时,请几位数学基础一般的学生在黑板展示,指出存在的问题,并请数学水平较高的学生给出正确的操作;选择其中一种基本作图,对三种语言(文字语言、图形语言、符号语言)的表述做完整示范;让学生解释作图原理,师生总结完善。

3.2 教学展开

请同学们回忆一下,教材中与垂直相关联的知识。

请同学们解答问题:利用直尺和圆规完成下列作图,不写作法,保留作图痕迹。如图1,点 P 在 $\odot O$ 上,过点 P 作 $\odot O$ 的切线。

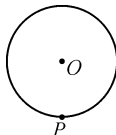


图1

方法1:作垂直平分线。

如图2,联结 OP 并延长至点 Q ,使 $PQ=OP$,作 OQ 的垂直平分线 AB ,则 PA 是 $\odot O$ 的切线。

教师:怎么想到这么画?

学生1:要作垂直,马上想到作垂直平分线。

分析:作垂直属于基本作图,其作图原理是全等三角形。

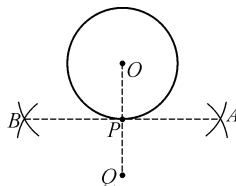


图2

方法 2:作三角形中位线.

如图 3,作直径 PQ 的垂直平分线 MN ,联结 QN 并延长至点 A ,使 $NA=QN$,则 AP 是 $\odot O$ 的切线.

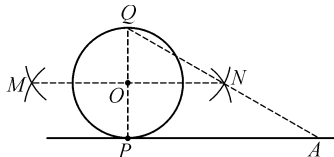


图 3

教师:怎么想到这么画?

学生 2:发现点 O 是直径的中点,于是想到三角形的中位线.

分析:利用“平行和垂直 \rightarrow 垂直”,这是间接作垂直的方法,学生及时联想三角形中位线,能灵活运用知识.

方法 3:作正方形.

如图 4,作直径 PQ 的垂直平分线 MN 交 $\odot O$ 于点 B ,作正方形 $OPAB$,则 PA 是 $\odot O$ 的切线.

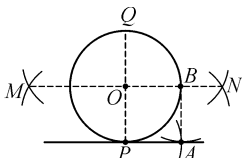


图 4

教师:怎么想到这么画?

学生 3:由图 3 直观发现,可以构造正方形.

分析:构造正方形,从几何直观到最近联想,这是一个好的思路.

方法 4:作平行四边形.

如图 5,作直径 PQ 的垂直平分线 MN ,交 $\odot O$ 于点 B , C ,联结 PC ,作 $\square BCPA$,则 PA 是 $\odot O$ 的切线.

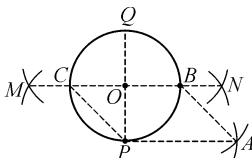


图 5

教师:怎么想到这么画?

学生 4:由图 4 得到启发构造平行四边形,也能达到同样目的.

分析:从直接作垂直,到间接作垂直,学生探究的思路被逐渐打开.

方法 5:作含 60° 角的菱形.

如图 6,以点 P 为圆心, OP 长为半径画弧,交 $\odot O$ 于点 Q ,作菱形 $OPMQ$,再作菱形 $PMAQ$,则 PA 是 $\odot O$ 的切线.

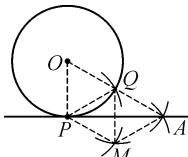


图 6

教师:怎么想到这么画?

学生 5:得到含 60° 角的菱形,菱形的对角线平分一组对角.

分析:以半径为边作等边三角形,有 60° 角的出现,这是一个新的思路.

推广:如图 7,先作直径 PQ ,作等边三角形 PMN ,作 PQ 恰为等边三角形 PMN 的角平分线,再作等边三角形 PMA ,则 PA 是 $\odot O$ 的

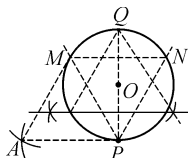


图 7

切线.

如图 8,作点 O 关于点 P 的对称点 O' ,作等圆 $\odot P$ 和 $\odot O'$,作等边三角形 ABC ,再作等边三角形 ABD ,则 AB 是 $\odot O$ 的切线.

教师:怎么想到这么画?

学生 6:受图 6 的启发,在圆内作出等边三角形,得到菱形 $NMAP$ (如图 7),在圆外连续构造等边三角形,得到菱形 $ACBD$ (如图 8).

分析:换一种角度构造等边三角形,学生的思路相互启发,相互借鉴.

方法 7:作“ $60^\circ + \frac{1}{2} \times 60^\circ$ ”角.

如图 9,作等边三角形 OPQ ,接着作等边三角形 PMQ ,再作 $\angle QPM$ 的角平分线 PA ,则 PA 是 $\odot O$ 的切线.

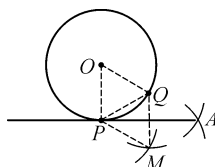


图 9

如图 10,延长 OP 至点 Q ,使 $OP=PQ$.以点 P 为圆心, OP 长为半径画圆,交 $\odot O$ 于点 M ;以点 Q 为圆心, OP 长为半径画圆,交 $\odot P$ 于点 N ,作 $\angle MPN$ 的角平分线 PA ,则 PA 是 $\odot O$ 的切线.

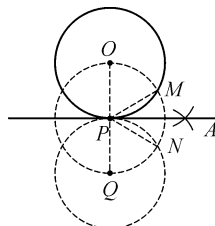


图 10

教师:怎么想到这么画?

学生 8:图 9 两次构造等边三角形,再作角平分线,得到 90° 角;图 10 两次构造圆,再作角平分线.

分析:学生的思维水平有差异,学会模仿,在模仿中领悟,在领悟中学会学习.

方法 7:利用“直径对直角”构造垂直.

如图 11,作直径 PQ ,在 $\odot O$ 上任取一点 M ,联结 MQ , MP ,作 $\angle MPA = \angle MQP$,则 PA 是 $\odot O$ 的切线.

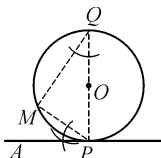


图 11

如图 12,作直径 PQ ,在 $\odot O$ 上任取一点 M ,联结 MQ , MP ,作 $\triangle ABP \cong \triangle PQM$,则 PA 是 $\odot O$ 的切线.

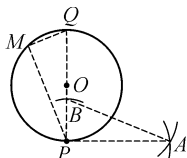


图 12

教师 9:怎么想到这么画?

学生:在图 11 中,利用“直径对直角”,通过基本

作图“作一个角等于已知角”,将两个锐角拼在一起;在图 12 中,先作直径,得到一个直角三角形,再作一个三角形与该直角三角形全等。

分析:从“直径对直角”出发,本质上也是“作一个角等于已知角”。

方法 8:构造圆,利用“直径对直角”得到垂直。

如图 13,在 $\odot O$ 上任取一点 Q ,联结 OP, OQ, PQ ,作 $\triangle OPQ$ 的外接圆 $\odot O'$,联结 OO' 并延长,交 $\odot O'$ 于点 A ,则 PA 是 $\odot O$ 的切线。

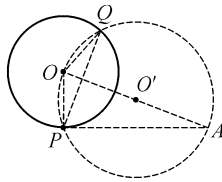


图 13

教师:怎么想到这么画?

学生 10:教材中有“过圆外一点作圆的切线”的方法。如图 14,在 $\odot O$ 上任取一点 Q ,先作 $\triangle OPQ$ 的外接圆 $\odot O'$,由半径 OO' 确定直径 OA ,得到直角。

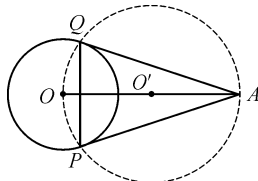


图 14

分析:从“过圆外一点作圆的切线”的方法,逆向思考,破解“过圆上一点作圆的切线”的方法。

方法 9:构造圆,利用“直径对直角”得到垂直。

如图 15,在 $\odot O$ 外任取一点 Q ,作 $\triangle OPQ$ 的外接圆 $\odot O'$,联结 OO' 并延长,交 $\odot O'$ 于点 A ,则 PA 是 $\odot O$ 的切线。

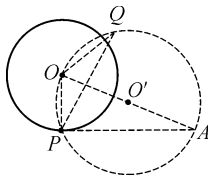


图 15

教师:怎么想到这么画?

学生 11:受图 14 的启发,只要作圆过 O, P 两点,过点 O 再作 $\odot O'$ 的直径。

分析:此法是方法 8 的一般化,本质上都是“直径对直角”,都是从圆周角的知识去深度理解。

方法 9:利用勾股定理得到直角。

学生 12:如图 16,作射线 PO 交 $\odot O$ 于点 Q ,将直径 PQ 进行 4 等分,设 $PM=MO=ON=NQ$,在射线 PO 上截取 $QB=NQ$,以 P 为圆心, PN 长为半径画弧;以 Q 为圆心, PB 长为半径画弧,两弧交于点 A ,则 PA 是 $\odot O$ 的切线。

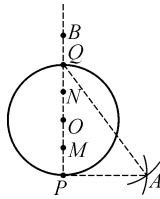


图 16

教师:怎么想到这么画?

学生 13:由直角联想到勾股定理(逆定理),用“勾 3 股 4 弦 5”的数据画出三角形。

分析:由形到数,数形结合,返璞归真,别具一格。

3.3 教学总结

本节课,“过圆上一点作圆的切线”的基本思路,可由图 17 的“结构图”揭示。

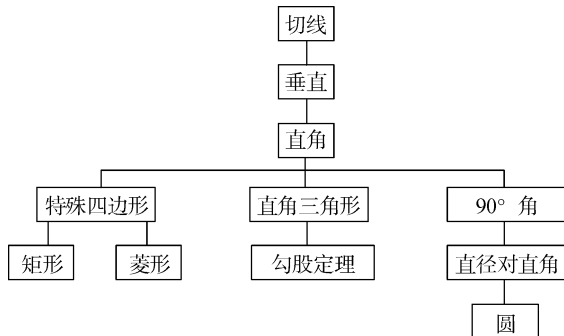


图 17

4 教学启示

4.1 从“尺规作图”到“综合作图”的教学价值

数学的终极目标是让学习者会用数学的眼光观察现实世界,会用数学的思维思考现实世界,会用数学的语言表达现实世界^[2]。从基本作图出发,能产生一些综合性的方法,笔者认为这个研究的过程有它独特的教学价值——数学的思维。

本题中作圆的切线即作垂直,由作垂直立即想到作垂直平分线,进而联想到作垂直可转化为作“平行+垂直”,作正方形(四个角都是直角),作菱形(对角线互相垂直)作 90° 的角,作圆(直径对直角),勾股逆定理等,既有合情推理,又有逻辑推理。

本题功能强大,内涵丰富,一题多解,多解又能归一,对每一种方法给出逻辑思考,这样在历练基本作图的基础上,让学生知法明理,融入思维直觉与逻辑推理,在动手、动脑、动口中培养学生的数学思维。

4.2 适当加强“尺规作图”的教学探究

大多数平面几何题,是求证(解)题,尺规作图题相对较少,但一些经典的尺规作图题往往富有挑战性、趣味性,其研究、开发有无限的可能。因此,我们要善于寻找“有内涵但不复杂”的作图题,吸引学生思考,使学生通过对这些几何作图题的多思、多解,深入挖掘几何图形的重要特征,深刻把握几何问题内在的数学本质。此外,在对一些尺规作图题多角度思考、探索解题思路的过程中,还可以建立与该几何知识点相关的知识块或知识链,使学生对整个平面几何的学习有系统性的知识建构。

参考文献:

- [1] 邢成云. 尺规作图[J]. 中学数学教学参考(中甸), 2019(1/2): 87-91.
- [2] 史宁中. 数学基本思想 18 讲[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2016.